2M

УДК 517.988

А.С. Миненко
Институт информатики и искусственного интеллекта
ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк, Украина
Украина, 83050, г. Донецк, пр. Б. Хмельницкого, 84, *minenko@iai.donetsk.ua*

Приближенный анализ нелинейной конвективной математической модели

A.S. Minenko
Institute of Informatics and Artificial Intelligence
of Donetsk National Technical University, Donetsk, Ukraine
Ukraine, 83050, c. Donetsk, B. Khmelnitskiy st., 84

Approximation Analysis of Nonlinear Mathematical Model with Convection

О.С. Міненко
Інститут інформатики і штучного інтелекту
ДВНЗ «Донецький національний технічний університет», м. Донецьк, Україна
Україна, 83050, м. Донецьк, пр. Б. Хмельницького, 84

Приблизний аналіз нелінійної конвективної математичної моделі

Изучаются теплофизические процессы, сопровождающиеся фазовыми переходами вещества, описываемые математической моделью, в которой температура каждой из фаз удовлетворяет уравнению переноса тепла со своими теплофизическими коэффициентами, на границе раздела фаз, обе температуры постоянны и равны температуре фазового перехода, а на заданных частях границы поддерживается определенный режим. Поверхность раздела фаз («свободная граница») является неизвестной и для ее определения дополнительно задается условие Стефана. Это условие превращает математическую модель в нелинейную проблему большой трудности. Для описания поля скоростей в жидкой фазе используется система уравнений Навье-Стокса. Для решения задачи предложен метод малого параметра.
Ключевые слова: дифференциальное уравнение, свободная граница, численные методы, функционал, оптимизация.

Thermophysical processes accompanied by substance phase transitions are studied in the work. These processes are described by the mathematical model, in which the temperature of each phase satisfies the heat-transfer equation with its thermophysical coefficients. In boundary of phase division, both temperatures are constant and equal to the temperature of a phase transition. On the set parts of boundary, certain schedule is supported. The surface of phase division (“free boundary”) is unknown and Stephan condition is additionally set for its determination. This condition turns mathematical model into nonlinear problem of large difficulty. The Navier-Stokes equations are used to describe velocity fields in liquid phase. To solve the task, the method of small parameter is offered.
Key words: differential equation, free boundary, numerical algorithms, functional, optimization.

Вивчаються теплофізичні процеси, які супроводжуються фазовими переходами речовин, які описуються математичною моделлю, в який температура кожної фази задовольняє рівнянню переносу тепла зі своїми теплофізичними коефіцієнтами, на границі розподілу фаз, температури постійні і дорівнюють температурі фазового перехода, а на заданих частинах границь підтримується заданий режим. Поверхня розділу фаз («вільна границя») є невідома і для її визначення задається умова Стефана. Ця умова перетворює математичну модель в нелінійну проблему великої тяжкості. Для описання поля швидкостей в рідинній фазі використовується система рівнянь Нав’є-Стокса. Для розв’язання задачі запропонован метод малого параметру.
Ключові слова: диференціальне рівняння, вільна межа, чисельні методи, функціонал, оптимізація

1. Принято считать, что чем ближе модель к действительности, тем точнее прогнозы и тем эффективнее, следовательно, управление. Однако это не так. Процессы ЭШП (электрошлаковый переплав) настолько сложны, что, попытавшись построить математическую модель, весьма близкую к реальному процессу со всеми его деталями и особенностями, можно прийти к очень сложным уравнениям, решения которых крайне затруднительны и приводят к существенным ошибкам. Исходя из этих соображений, необходимо стремиться к построению сравнительно простой математической модели процесса ЭШП, отражающей его самые существенные стороны.

В настоящее время известны основные качественные зависимости протекания процесса ЭШП. К сожалению, полных математических моделей его не существует.

Перейдем к построению математической модели процесса кристаллизации.

Будем обозначать через $\Omega^{\pm}{}_t$ область, занятую жидкой (твердой) фазой в момент времени *t*. При этом Ω_0 – заданная область в R^3, граница которой состоит из двух замкнутых связанных поверхностей $\Gamma_0{}^{+}$ и $\Gamma_0{}^{-}$, не имеющих самопересечений, где Γ_0 – гладкая замкнутая поверхность, лежащая внутри Ω_0, такая, что $\Gamma_0{}^{-}$ лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_0. Требуется определить области $\Omega^{+}{}_t$ и $\Omega^{-}{}_t$ (т.е. границы $\Gamma_t{}^{+}$ и $\Gamma_t{}^{-}$), вектор скорости $\vec{V}(x,t) = (\vec{V}_1(x,t), \vec{V}_2(x,t), \vec{V}_3(x,t))$, давление $p(x,t)$, концентрации примеси $c(x,t)$, температуру жидкой $u^{+}(x,t)$ и твердой $u^{-}(x,t)$ фаз по следующим условиям:

$$\frac{\partial u^{+}(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)u^{+}(x,t) - a^2{}_{+}\nabla^2 u^{+}(x,t) = 0\,,\ (x,t)\in D_T{}^{+}\,,$$

$$\frac{\partial u^{-}(x,t)}{\partial t} - a^2{}_{-}\nabla^2 u^{-}(x,t) = 0\,,\ (x,t)\in D_T{}^{-}\,,$$

$$\frac{\partial \vec{V}(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t) + \nabla p(x,t) = \nu\nabla^2\vec{V}(x,t) + \vec{f}(u^{+},c)\,,\ (x,t)\in D_T{}^{+}\,, \qquad (1)$$

$$\nabla\vec{V}(x,t) = 0\,,\ (x,t)\in D_T{}^{+}\,,\ \nabla\vec{V}(x,0) = \vec{C}(x)\,;$$

$$T(\vec{V},p)\vec{n} = -q(x,t)\vec{n}\,,\ (x,t)\in\Gamma_t{}^{+}; V_n = -(1-\frac{\rho^{-}}{\rho^{+}})W_n\,;$$

$$V_\tau = 0\,,\ (x,t)\in\Gamma_t\,,\ u^{\pm}(x,t) = B^{\pm}(x,t)\,,\ (x,t)\in\Gamma_t{}^{+}\cup\Gamma_0{}^{-}\,;$$

$$u^{\pm}(x,0) = A^{\pm}(x)\,; u^{+} = u^{-} = T^{*} - \varepsilon c\,,\ k_{-}\frac{\partial u^{-}}{\partial n} - k_{+}\frac{\partial u^{+}}{\partial n} = \chi\, p^{+}W_n\,,\ (x,t)\in\Gamma_t\,,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x,t) + (\vec{V}\nabla)c(x,t) - \gamma\nabla^2 c(x,t) = 0\,,\ (x,t)\in D_T{}^{+}\,;$$

$$c(x,0) = g_0(x)\,,\ c(x,t) = g(x,t)\,,\ (x,t)\in\Gamma_t{}^{+}\,,\ -\alpha\frac{\partial c}{\partial n} = \beta c W_n\,,\ (x,t)\in\Gamma_t\,.$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$, $D_T{}^{\pm} = \{(x,t): x\in\Omega^{\pm}{}_t, t(0,T)\}$, $\Omega^{\pm}{}_t$ – области соответственно жидкой и твердой фаз, $\partial\Omega^{+} = \Gamma_t\cup\Gamma_t{}^{+}$, $\partial\Omega^{-} = \Gamma_0{}^{-}\cup\Gamma_t$, $\vec{n}$ – нормаль к Γ_t, направленная в сторону Ω_t^{+}. Далее, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $T(\vec{V},p)$ – тензор напряжений с элементами $T_{ij} = -\delta_{ij}P + \nu(\partial V_i/\partial x_j + \partial V_j/\partial x_i)$, V_n и V_τ – нормальная и тангенциальная составляющие $\vec{V}$, W_n – скорость движения фронта кристаллизации в направлении нормали $\vec{n}$;

$T^*, \nu, \varepsilon, \chi, \rho^+, \rho^-, \alpha, \beta, \gamma, k_+, k_-$ – известные положительные постоянные. Отметим также, что если $\Phi(x,t) = u^{\pm}(x,t) + \varepsilon c(x,t) - T^* = 0$ – уравнение поверхности Γ_t, тогда $W_n = -\Phi_t \,|\nabla\Phi|$.

В дальнейшем удобно условие Стефана представить в следующем виде:
$L(u^+, u^-, \Gamma_t, \varepsilon) = k_-^{\,2}\,|\nabla u^-|^2 - k_+^{\,2}\,|\nabla u^+|^2 + \varepsilon(k_-^{\,2} + k_- k_+)(\nabla u^-, \nabla c) - \varepsilon(k_-^{\,2} + k_- k_+)(\nabla u^+, \nabla c) +$
$+ \chi\rho^+(k_- u^-{}_t + k_+ u_t^+) + \chi\rho^+\varepsilon(k_+ + k_-)c_t = 0$, $(x,t) \in \Gamma_t$.

В работе предполагается, что $A(x) \in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega_0^+})$, $\vec{C}(x) \in H^{2+\alpha}(\Omega_0^+)$, $B^{\pm}(x,t) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$ $(\Gamma_t^+ \cup \Gamma_0^- \times [0,T])$, $\vec{f}(u^+, c) \in C^1(R^2)$, $g(x,t) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_t^+ \times [0,T])$, $g_0(x) \in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega_0}^+)$. При этом $g(x,t)$ и $g_{x_i}(x,t)$ должны быть функциями класса $H^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(R^3 \times [0,T])$. Считается также, что выполнены условия согласования до первого порядка включительно, которые формулируются аналогично [1, с. 268, с. 363].

Цель работы – исследование задачи Стефана с учетом конвекции и примесей в жидкой фазе.

Постановка задачи – построение приближенного решения задачи, используя метод малого параметра.

2. Будем искать свободные границы Γ_t и Γ_t^+ в следующем виде: $\Gamma_t = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega,t)\}$, $\Gamma_t^+ = \{x = x(\theta) + \eta(\theta,t)\vec{n}(\theta)\}$, где $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $x(\omega) \in \Gamma_0$, $x(\theta) \in \Gamma_0^+$, $\rho(\omega,t)$ и $\eta(\theta,t)$ – некоторые функции соответственно классов $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0 \times [0,T])$ и $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_0^+ \times [0,T])$, $\rho(\omega,0) = 0$ и $\eta(\theta,0) = 0$. Введем также обозначения $Q_T^{\pm} = \Omega_0 \times [0,T]$, $\Gamma_{0T}^- = \Gamma_0^- \times [0,T]$, $\Gamma_{0T}^+ = \Gamma_0^+ \times [0,T]$, $\Gamma_{0T} = \Gamma_0 \times [0,T]$.

Далее, для достаточно малых чисел ε будем искать решение задачи (1) в виде следующих разложений:

$$u^{\pm}(x,t;\varepsilon) = u_0^{\pm}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k^+(x,t), \quad p(x,t;\varepsilon) = p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k p_k(x,t),$$
$$V_i(x,t;\varepsilon) = V_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k V_{ik}(x,t), \quad c(x,t) = c_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k c_k(x,t), \qquad (2)$$
$$i = 1,2,3; \quad \rho(\omega,t;\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \rho_k(\omega,t), \quad \eta(\theta,t;\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \eta_k(\theta,t).$$

В работах [2-7] изучены нулевые и первые приближения задачи (1) для малых чисел ε. При этом установлено, что $u_0^{\pm}(x) = A^{\pm}(x)$, $\vec{V}_0(x) = \vec{C}(x)$, $c_0(x) = g_0(x)$, $\rho_1(\omega,t) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$, $\eta_1(\theta,t) \in \Gamma_{0T}^+$, $u_1(x,t;\rho,\eta) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q_T^{\pm}})$, $c_1(x,t;\rho,\eta) \in H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\overline{Q_T^{\pm}})$, причем $\rho_1(\omega,t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_1:
$M_1\rho_1 = \dfrac{1}{\chi p^+}\displaystyle\int_0^t (k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} + f_1(x,t))dt$, $x(\omega) \in \Gamma_{0T}$.

3. Имеют место следующие формулы:
$u_x\big|_{\Gamma_t} = u_{0x} + \varepsilon(\alpha_1 f_1 + \beta_1 u_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x}) + \varepsilon^2(\alpha_2 f_2 + \beta_2 u_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x}) + \ldots + \varepsilon^k(\alpha_k f_k + \beta_k u_k + \dfrac{\partial u_k}{\partial x}) + o(\varepsilon^k)$,
$(x,t) \in \Gamma_{0T}$; $W_n\big|_{\Gamma_t} = -(\dfrac{u_{1t}}{|\nabla u_0|} + F_1)\varepsilon - (\dfrac{u_{2t}}{|\nabla u_0|} + F_2)\varepsilon^2 - \ldots - (\dfrac{u_{kt}}{|\nabla u_0|} + F_k)\varepsilon^k + o(\varepsilon^k) = 0$,
$(x,t) \in \Gamma_{0T}$,

$L(u^+, u^-, \Gamma_t, \Gamma_t^+, \varepsilon)|_{\Gamma_t} = [k_-^2 |\nabla u_0^-|^2 - k_+^2 |\nabla u_0^+|^2] + \varepsilon[2k_-^2(\nabla u_0^-, \nabla u_1^-) - 2k_+^2(\nabla u_0^+, \nabla u_1^+) + \Phi_1 +$
$+\chi\rho^+(k_- u_{1t}^- + k_+ u_{1t}^+)] + \ldots + \varepsilon^k[2k_-^2(\nabla u_0,^- \nabla u^-{}_k) - 2k_+^2(\nabla u_0^+, \nabla u^+{}_k) + \Phi_k + \chi\rho^+(k_- u_{kt}^- + k_+ u_{kt}^+)] +$
$+o(\varepsilon^k) = 0$, $(x,t) \in \Gamma_{0T}$, где $\alpha_k(x,t)$, $\beta_k(x,t)$, $f_k(x,t)$, $F_k(x,t)$ и $\Phi_k(x,t)$ – известные функции. Из последней формулы следует, что $k_-^2 |\nabla u_0^-|^2 - k_+^2 |\nabla u_0^+| = 0$, $x \in \Gamma_0$,
$k_- \dfrac{\partial u_k^-}{\partial n} - k_+ \dfrac{\partial u_k^+}{\partial n} + \Phi_k = \chi\rho^+ \dfrac{\partial \rho_k}{\partial t}$, $(x,t) \in \Gamma_{0T}$.

4. Введем обозначения: $M_1(\vec{\xi_i}, \vec{\zeta_j}) = (\vec{\xi_0}\nabla)\vec{\zeta_k} + (\vec{\xi_1}\nabla)\overrightarrow{\zeta_{k-1}} + \ldots + (\vec{\xi_k}\nabla)\vec{\zeta_0}$, $M_2(\vec{\xi_i}, \zeta_j) = (\vec{\xi_0}\nabla)\zeta_k + (\vec{\xi_1}\nabla)\zeta_{k-1} + \ldots + (\vec{\xi_k}\nabla)\zeta_0$
$N(\vec{V_i}, p_j)\vec{n} = T(\vec{V_0}, p_k)\vec{n} + T(\vec{V_1} p_{k-1})\vec{n} + \ldots + T(\vec{V_k}, p_0)\vec{n}$.

Затем рассмотрим k-е приближение $(\vec{V_k}, u_k^\pm, p_k, \rho_k, \eta_k, c_k)$ задачи (1) для малых чисел ε. Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{V_k}}{\partial t} + M_1(\vec{V_i}, \vec{V_j}) + \nabla p_k = \nu\nabla^2\vec{V_k} + \dfrac{1}{k!} d^2 f(u_k^+, c_k),\ (x,t) \in Q_T^+ \\ \nabla\vec{V_k} = 0,\ (x,t)Q_T^+;\ N(\vec{V_i}, p_j)\vec{n} = 0,\ (x,t) \in \Gamma_{0T}^+, \\ \vec{V_k}(x,0) = 0,\ V_{kn} = (1 - \dfrac{p^-}{\rho^+})[\dfrac{u_{kt}^+}{|\nabla u_0^+|} + F_k(x,t)],\ V_{k\tau} = 0,\ (x,t) \in \Gamma_{0,T} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_k^+}{\partial t} + M_2(\vec{V_i}, u_k^+) = a^2{}_+\nabla^2 u_k^+,\ (x,t) \in Q_T^+, \\ \dfrac{\partial u_k^-}{\partial t} - a^2{}_-\nabla^2 u_k^- = 0,\ (x,t) \in Q_T^-, \\ u^\pm{}_k(x,0) = 0,\ u^\pm{}_k(x,t) = 0,\ (x,t) \in \Gamma_{0T}^- \cup \Gamma_{0T}^+,\ u_k^+ = u_k^-, \\ |\nabla u_0^\pm(x(\omega))|\,\rho_k(\omega,t) + u_k(x(\omega),t) + f_k(x(\omega),t) = 0,\ (x,t) \in \Gamma_{0T} \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c_k}{\partial t} + M_2(\vec{V_i}, c_j) - \gamma\nabla^2 c_k = 0,\ (x,t) \in Q_T^+, c(x,0) = 0,\ c_k(x,t) = 0, \\ (x,t) \in \Gamma_{0T}^+;\ -\alpha\dfrac{\partial c_k}{\partial n} - \beta_k c_k = c_0(x)\dfrac{u_{kt}^+}{|\nabla u_0^+|} + F_k^*, (x,t) \in \Gamma_{0T}, \\ \dfrac{\partial c_0}{\partial n}\eta_k(\theta,t) + c_k(x(\theta),t) + g_k(x(\theta),t) = 0,\ (x,t) \in \Gamma_{0T}^+, \end{cases} \tag{5}$$

здесь $F_k(x,t)$, $f_k(x,t)$ и $F_k^*(x,t)$ – известные функции.

Зададим теперь $\vec{V} = \vec{V}_1(x,t)$. Затем решим задачу (4), (5) и найдем $u_1^\pm$, c_1, ρ_1, η_1. После чего решим задачу (3), являющуюся начально-краевой задачей для системы Навье-Стокса. Затем, используя новое значение $\vec{V_2}(x,t)$, снова решаем задачу (4) и (5) и т.д. Следовательно, получим процесс последовательных приближений $\vec{V_k}, u_k^\pm$, c_k, ρ_k, η_k. Доказательство сходимости этого процесса аналогично приведенному в [8] причем при заданном $\rho_k(\omega,t) \in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$ найдем функции $u_k^\pm(x,t,\rho_k) \in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overrightarrow{Q_T^\pm})$, $c_k(x,t,\rho_k) \in H^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\overrightarrow{Q_T^\pm})$ как единственное решение задачи (4) – (5), а $\rho_k(\omega,t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_k:

$$M_k\rho_k = \frac{1}{\chi\rho^+}\int_0^t (k_- \frac{\partial u_k^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_k^+}{\partial n} + \Phi_k(x,t))dt,\ (x(\omega),t) \in \Gamma_{0T}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть выполнены условия $|\nabla A^{+}(x(\omega))| = \frac{\partial g_0}{\partial n}$, $x \in \Gamma_0$; $\frac{c(k_- + k_+)}{\chi \rho^{+}} < 1$, где c – некоторая постоянная [1, с. 364] и пусть $\nabla^2 A^{+}(x) = 0$, $x \in \Omega_0^{\pm}$, $A^{\pm}(x)|_{x \in \Gamma_0^{+} \cup \Gamma_0^{-}} = B^{\pm}(x,0)$, $A^{\pm}(x)|_{\Gamma_0} = 0$, $\vec{C}(x) = 0$, $x \in \overline{\Omega}_0^{\pm}$, $k_- |\nabla A^{-}(x)|_{\Gamma_0} = k_+ |\nabla A^{+}(x)|_{\Gamma_0}$, $|\nabla A^{\pm}(x)||_{\Gamma_0} \geq \tilde{\varepsilon} > 0$ (здесь $\tilde{\varepsilon}$ – некоторая положительная постоянная). Тогда оператор M_k, действующий из $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$ в $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_{0T})$, имеет там неподвижную точку.

Лемма 2. В качестве k-го приближения задачи (1) можно взять решение $u_k^{\pm}(x,t)$, $c_k(x,t)$, $\vec{V_k}(x,t)$, $\rho_k(\omega,t)$, $\eta_k(\theta,t)$ задачи (4) – (5).

Теорема. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда приближения $V_k(x,t)$, $u_k^{\pm}(x,t)$, $c_k(x,t)$, $\rho_k(\omega,t)$, $\eta_k(\theta,t)$ сходятся к функциям $V(x,t)$, $u^{\pm}(x,t)$, $c(x,t)$, $\rho(\omega,t)$, $\eta_k(\theta,t)$ – класса $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$, являющимся решением задачи (1).

Лемма 3. Пусть $\frac{\partial g_0(x)}{\partial n} \neq 0$ на Γ_0^{+}. Тогда при малых числах ε и достаточно малых значениях t справедливы формулы:

$$\Gamma_t^{+} : x = x(0) - \vec{n} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^{i} \frac{c_i(x(\theta),t) + g_i(x(\theta),t)}{\frac{\partial c_0}{\partial n}} + o(\varepsilon^{k}),\ x \in \Gamma_0^{+},$$

$$\Gamma_t : x = x(\omega) - \vec{n} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^{i} \frac{u_i(x(\omega),t) + f_i(x(\omega),t)}{|\nabla u_0^{\pm}(x(\omega))|} + o(\varepsilon^{k}),\ x \in \Gamma_0.$$

Замечание. Доказанная теорема фактически устанавливает существование решения задачи (1) в классе функций $H^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$.

Литература

1. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева – М. : Наука, 1967. – 756 с.
2. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей / Миненко А.С. – К. : Наукова думка, 2005. – 341 с.
3. Шевченко А.И. Приближенный анализ многомерной конвективной задачи Стефана / А.И. Шевченко, А.С. Миненко // Доповіді НАН України. – 2010. – № 4. – С. 30-34.
4. Шевченко А.И. Приближенный анализ стационарной конвективной задачи Стефана / А.И. Шевченко, А.С. Миненко // Доповіді НАН України. – 2010. – № 5. – С. 36-40.
5. Шевченко А.И. Приближенный анализ пространственной конвективной задачи Стефана / А.И. Шевченко, А.С. Миненко // Доповіді НАН України. – 2010. – № 10. – С. 29-33.
6. Миненко А.С. Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Ритца / А.С. Миненко // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 11. – С. 1546-1556.
7. Миненко А.С. О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца / А.С. Миненко // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 10. – С. 1385-1394.
8. Солонников В.А. Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью / В.А. Солонников // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1977. – **41**, № 6. – С. 1388-1424.

Literatura

1. Ladyzhenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural’ceva N.N.. Linejnye i kvazilinejnye uravnenija parabolicheskogo tipa. M.: Nauka. 1967. 756 s.
2. Minenko A.S. Variacionnye zadachi so svobodnoj granicej. K.: Naukova dumka. 2005. 341 s.
3. Shevchenko A.I., Minenko A.S.. Dopovidi NAN Ukraini. № 4. 2010. S. 30-34.
4. Shevchenko A.I., Minenko A.S.. Dopovidi NAN Ukraini. № 5. 2010. S. 36-40.
5. Shevchenko A.I., Minenko A.S.. Dopovidi NAN Ukraini. № 10. 2010. S. 29-33.
6. Minenko A.S. Ukr. mat. zhurn. 2007. - 59, № 11. S. 1546-1556.
7. Minenko A.S. Ukr. mat. zhurn. 2006. - 58, № 10. S. 1385-1394.
8. Solonnikov V.A. Izv. AN SSSR. Ser. matem. 1977. - 41, № 6. S. 1388-1424.

A.S. Minenko

Approximation Analysis of Nonlinear Mathematical Model with Convection

This paper extend to the rime-dependent case some result obtained by the authors for the steady-nonstate Stephan problem with convection. Referring to the ice-water system, water is assumed to be incompressible and to obey the Stocks equation:

$$\frac{\partial \vec{V}(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t) + \nabla p(x,t) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{V}(x,t) + \vec{f}(u^+).$$

(V is velocity, ν is kinematic viscosity, p is pressure, f is buoyancy force, u^+ is water temperature), while temperature u^+ satisfies the heat conduction-convection equation with temperature-dependent thermphysical properties:

$$\frac{\partial u^+(x,t)}{\partial t} + (\overrightarrow{V\nabla})u^+(x,t) - a_+^2\nabla^2 u^+(x,t) = 0, \quad (x,t) \in D_T^+$$

The temperature field u^- in the solid phase is governed by diffusion only:

$$\frac{\partial u^-(x,t)}{\partial t} - a_-^2\nabla^2 u^-(x,t) = 0 \quad (x,t) \in D_T^-.$$

At the ice-water interface, $u^+ = u^- = 0$ and Stefan condition holds:

$$u^\pm(x,t)\Big|_{x\in\Gamma_t} = 0, \sum_{i=1}^{3}\left[k_- \frac{\partial u^-}{\partial x_i} - k_+ \frac{\partial u^+}{\partial x_i}\right]\cos(n, x_i) + k\cos(n,t) = 0, \quad x \in \Gamma_t,$$

$$D_T^\pm = \left\{(x,t) : x \in \Omega_t^\pm, t \in (0,t)\right\} \; x = (x_1, x_2, x_3), \; \Omega_t^\pm.$$

The scheme is completed by initial and boundary conditions.

The author presents an existence theorem for the case of three space dimensions. The main difficulty consists in the fact that to interpret the Stokes equation in a week sense, some information is needed on the region where the temperature is positive, which is in turn influenced by the velocity field itself. The precise formulation of the problem requires a technical choice on function spaces. Existence of a solution is proved by introducing a temperature dependent penalty term in the fluid flow equation in order to define both the approximating temperature U^+ and the approximation velocity $\vec{V}$ in the whole domain. Compactness arguments are used to get a convergent subsequence, whole limit is shown to solve the original problem. The question of uniqueness is left open.

Статья поступила в редакцию 02.12.2011.